[21-BA428-B/21-BS432-B]

AT THE END OF FOURTH SEMESTER - (CBCS PATTERN) DEGREE EXAMINATIONS

MATHEMATICS - IV(B) - LINEAR ALGEBRA

(COMMON FOR B.A., B.Sc)

(UG PROGRAM (4 YEARS HONORS))

(w.e.f. Admitted Batch 2020-21)

Time : 3 Hours　　　　Maximum : 75 Marks

SECTION - A

విభాగం - ఎ

Answer any FIVE questions. Each question carries Five marks. (5×5=25)

ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు ఐదు మార్కులు.

1. Express the vector $\alpha=(1,-2,5)$ as a linear combination of the vectors $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,2,3)$, $e_3=(2,-1,1)$.

$\alpha=(1,-2,5)$ ను $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,2,3)$, $e_3=(2,-1,1)$ అనే సదిశల యొక్క ఋజు సంయోగముగా వ్రాయండి.

2. If S and T are two subsets of a vector space V(F) then show that $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$.

V(F) సదిశాంతరాళంలో S, T లు రెండు ఉపాంతరాళాలు అయితే $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$ అని చూపండి.

3. Show that the set of vectors $\{(2,1,4),(1,-1,2),(3,1,-2)\}$ form a basis for R^3.

$\{(2,1,4),(1,-1,2),(3,1,-2)\}$ సదిశల సమితి R^3 కి ఆధారమని చూపండి.

4. Show that the function $T: V_3(R) \to V_2(R)$ defined by $T(x,y,z) = (x-y, x-z)$ is a linear transformation.

$T: V_3(R) \to V_2(R)$ ప్రమేయాన్ని $T(x,y,z) = (x-y, x-z)$ గా నిర్వచించబడిన T ఋజు పరివర్తనము అని చూపండి.

5. Let U(F) and V(F) be two vector spaces and $T: U \to V$ is a linear transformation. Then the range set R(T) is a subspace of V(F).

U(F), V(F) లు రెండు సదిశాంతరాళములు మరియు $T: U \to V$ ఋజు పరివర్తనమైన, V(F) కి వ్యాప్తి సమితి R(T) ఉపాంతరాళమని చూపండి.

6. Show that the system of equations $x+2y-z=3$, $3x-y+2z=1$, $2x-2y+3z=2$, $x-y+z=-1$ is consistent and solve them.

$x+2y-z=3, 3x-y+2z=1$,
$2x-2y+3z=2, x-y+z=-1$ సమీకరణాలు పొంతన నియమం పాటిస్తుందని చూపి మరియు సాధించండి.

7. State and prove Triangle - inequality.

త్రిభుజ అసమానతను ప్రవచించి నిరూపించండి.

8. Show that $\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{-2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right)\right\}$ from on orthonormal set $V_3(R)$.

$V_3(R)$ లో సమితి $\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{-2}{.3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right)\right\}$ ని లంబాభిలంబ సమితి అని చూపండి.

SECTION - B

విభాగం - బి

Answer ALL the questions. Each question carries Ten marks. **(5×10=50)**

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు పది మార్కులు.

9. a) Show that the necessary and sufficient condition for a non - empty subset W of a vector space V(F) to be a subspace of V is that $a, b \in F, \alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$.

W అనునది V(F) అను సదిశాంతరాళము యొక్క శూన్యేతర ఉపసమితి. W అనునది V(F) కు ఉపాంతరాళము అగుటకు ఆవశ్యకాపర్యాప్త నియమము $a, b \in F$, $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b.\beta \in W$ అని చూపుము.

(OR/లేదా)

b) If W_1 and W_2 are two subspaces of a vector space V(F) then prove that

W_1, W_2 లు V(F) కి రెండు ఉపాంతరళాలు అయితే

i. $W_1 + W_2$ is a subspace of V(F) and

$W_1 + W_2$ అనునది V(F) కి ఉపాంతరాళం అని చూపి మరియు

ii. $W_1 \subseteq W_1 + W_2$ and $W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

$W_1 \subseteq W_1 + W_2$ మరియు $W_2 \subseteq W_1 + W_2$ అని చూపండి.

10. a) Let W be a subspace of a finite dimensional vector space V(F) then prove that
dim(V/W) = dim V - dim W.

పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళము V(F) కి ఉపాంతరాళము అయితే dim(V/W) = dim V - dim W.

(OR/లేదా)

b) If W_1 and W_2 are the subspaces of $V_4(R)$ defined by
$W_1 = \{(a,b,c,d) / \underline{b-2c+d=0}\}$,
$W_2 = \{(a,b,c,d) / a=d, b=2c\}$ compute dim W_1, dim W_2, $\dim(W_1 \cap W_2)$ and $\dim(W_1 + W_2)$.

$V_4(R)$ కి W_1 మరియు W_2 లు రెండు ఉపాంతరళాలు అయితే
$W_1 = \{(a,b,c,d) / \underline{b-2c+d=0}\}$,
$W_2 = \{(a,b,c,d) / a=d, b=2c\}$ గా నిర్వచించబడిన dim W_1, dim W_2, $\dim(W_1 \cap W_2)$ మరియు $\dim(W_1 + W_2)$ లెక్కించండి.

11. a) State and prove Rank - Nullity theorem.

కోటి - శూన్యత సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Let $T : V_3(R) \to V_3(R)$ be defined by $T(a,b,c) = (3a, a-b, 2a+b+c)$. Prove that $(T^2 - I)(T - 3I) = \overline{0}$.

$T : V_3(R) \to V_3(R)$ ని $T(a,b,c) = (3a, a-b, 2a+b+c)$ గా నిర్వచించిన $(T^2 - I)(T - 3I) = \overline{0}$ అని నిరూపించండి.

12. a) Find the eigen values and eigen vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$ కి లాక్షిణిక మూలాలు మరియు లాక్షిణిక సదిశలు కనుగొనుము.

(OR/లేదా)

b) State and prove Cayley - Hamilton theorem.

కేలీ - హమిల్టన్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

13\. a) State and prove Bessel's inequality.

బెస్సెల్ అసమానతను ప్రవచించి నిరూపించండి.

(OR/లేదా)

b) Applying Gram - Schmidt process obtain an orthonormal basis of $R^3(R)$ from the basis $\{(1,0,1),(1,0,-1),(0,3,4)\}$.

$R^3(R)$ ఆధారము $\{(1,0,1),(1,0,-1),(0,3,4)\}$ కు గ్రామ్-స్మిడ్ట్ పద్ధతిని ఉపయోగించి లంబాభిలంబ సమితిని కనుగొనుము.
